Zur Holomorphentheorie der Ringe

Von H. J. WEINERT und R. EILHAUER in Potsdam (DDR)

§ 1

In seiner Arbeit [2] hat L. RÉDEI den zum Begriff des Holomorphs einer Gruppe analogen Begriff der Holomorphe eines Ringes geschaffen, der es in der Tat ermöglicht, zu einer Reihe von gruppentheoretischen Sätzen entsprechende Sätze für Ringe aufzustellen. Ein auffälliger Unterschied zur Gruppentheorie ist dabei, daß es Ringe gibt, die mehr als ein Holomorph haben[1]). So wird bereits in [2] gezeigt, daß ein Zeroring R dann und nur dann genau ein Holomorph besitzt, wenn der Endomorphismenring $\mathscr{E}(R^+)$ von R^+ kommutativ ist[2]). Da gemäß SZELE—SZENDREI [4] verhältnismäßig wenig Moduln kommutative Endomorphismenringe besitzen, könnte man vermuten, daß auch allgemein die Ringe mit mehreren Holomorphen vorherrschen. Die nachfolgenden Ergebnisse berechtigen aber wohl zu der Feststellung, daß die weitaus wichtigsten Klassen von Ringen nur ein Holomorph besitzen.

Zunächst sind nach unserer Kenntnis die folgenden drei hinreichenden Bedingungen für die Einzigkeit des Holomorphs eines Ringes R bekannt:

I) R hat ein Einselement (RÉDEI [2]).

II) $R = R^2$, wobei mit R^2 das von allen Produkten von Elementen aus R erzeugte Ideal bezeichnet wird (LEEUWEN [1]).

III) R ist nullteilerfrei (LEEUWEN [1], im kommutativen Fall bereits SZENDREI [5]).

Für die Durchführung des Beweises in [1] reicht es aber schon aus, daß R überhaupt ein links- bzw. rechtsreguläres Element enthält. In weiterer Verschärfung werden wir sogar *die Einzigkeit des Holomorphs von R aus folgender Bedingung ableiten:*

IV. *Für den Annullator $\mathfrak{n}$ von R gilt* $\mathfrak{n} = (0)$.

Damit genügt es, die alles übrige umfassenden Bedingungen II und IV zu beachten, zu denen noch die ersichtlich hinreichende Bedingung V hinzukommt.

V. Der Endomorphismenring $\mathscr{E}(R^+)$ von R^+ ist kommutativ.

---

[1]) In diesem Falle ist es auch nicht möglich, die Eindeutigkeit des Holomorphs eines solchen Ringes R etwa durch eine geeignete Auswahl oder mit Hilfe des Durchschnitts der maximalen Ringe befreundeter Doppelhomothetismen von R erreichen zu wollen, da nichtbefreundete Doppelhomothetismen von R nur durch verschiedene Everettsche Erweiterungen induziert werden können. Auch überlegt man sich leicht, daß verschiedene Holomorphe von R keine äquivalenten Erweiterungen von R sein können.

[2]) In der Bezeichnung richten wir uns weitgehend nach RÉDEI [3]. Insbesondere war das dort auf Seite 204 formulierte Problem Anlaß zu der vorliegenden Note. Die wichtigsten Begriffsbildungen fassen wir übrigens am Anfang von § 2 auch noch einmal zusammen.

Wir werden jedoch zeigen, daß es auch noch weitere Ringe mit nur einem Holomorph gibt, die also keiner der bisher genannten hinreichenden Bedingungen genügen. Dabei verwenden wir Untersuchungen über diejenigen Endomorphismen, die als Komponenten der Doppelhomothetismen auftreten können. In diesem Zusammenhang ergeben sich weitere Kriterien für die Einzigkeit des Holomorphs eines Ringes R, auf die sich alle anderen Aussagen zurückführen lassen[3]. Insbesondere verweisen wir hier auf die in § 2 formulierten Sätze 3 und 4.

Abschließend wenden wir uns noch der Frage nach der Kommutativität der Holomorphe zu, wo wir bisher bekannte Ergebnisse entsprechend ergänzen. Auch hier ist ja die Tatsache, daß es zahlreiche Ringe mit kommutativen Holomorphen gibt, ohne Analogon zur Gruppentheorie, da das Holomorph einer Gruppe G (vom trivialen Fall der Gruppen 1. und 2. Ordnung abgesehen) nichtkommutativ ist.

§ 2

Es sei R ein Ring mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$, und $\mathscr{E}(R^+)$ der Endomorphismenring des als Modul R^+ aufgefaßten Ringes R. Die direkte Summe

$$\mathscr{E}_2(R^+) = \mathscr{E}(R^+) \oplus \mathscr{E}^\circ(R^+)$$

von $\mathscr{E}(R^+)$ und dem zu ihm entgegengesetzten Ring $\mathscr{E}^\circ(R^+)$ besteht dann aus allen Doppelendomorphismen $a = (a_1, a_2)$ von R^+, d. h. den Doppelabbildungen

$$\alpha \to a\alpha = a_1\alpha, \qquad \alpha \to \alpha a = a_2\alpha,$$

für deren Nacheinanderanwendung also gilt:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \alpha &\to (ab)\alpha = (a_1b_1)\alpha = a_1(b_1\alpha), \\ \alpha &\to \alpha(ab) = (a_2 \circ b_2)\alpha = (b_2a_2)\alpha = b_2(a_2\alpha). \end{aligned}$$

Insbesondere heißt ein solcher Doppelendomorphismus $a = (a_1, a_2)$ ein Doppelhomothetismus von R, wenn er erfüllt:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} a(\alpha\beta) &= (a\alpha)\beta, \quad \text{d. h.} \quad a_1(\alpha\beta) = (a_1\alpha)\beta, \\ (\alpha\beta)a &= \alpha(\beta a), \quad \text{d. h.} \quad a_2(\alpha\beta) = \alpha(a_2\beta), \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \qquad (\alpha a)\beta = \alpha(a\beta), \quad \text{d. h.} \quad (a_2\alpha)\beta = \alpha(a_1\beta),$$

$$\text{(4)} \qquad (a\alpha)a = a(\alpha a), \quad \text{d. h.} \quad a_2a_1\alpha = a_1a_2\alpha.$$

Schließlich nennt man Doppelhomothetismen $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ befreundet, wenn gilt:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} (a\alpha)b &= a(\alpha b), \quad \text{d. h.} \quad b_2a_1\alpha = a_1b_2\alpha, \\ (b\alpha)a &= b(\alpha a), \quad \text{d. h.} \quad a_2b_1\alpha = b_1a_2\alpha. \end{aligned}$$

Da Differenz und Produkt befreundeter Doppelhomothetismen a und b von R wieder Doppelhomothetismen von R sind, welche darüber hinaus mit jedem zu a

[3]) Der Beweis von IV kann allerdings ebensogut auch unabhängig davon geführt werden, vgl. Fußnote 4.

und b befreundeten Doppelhomothetismus c befreundet sind, kann man von den in $\mathscr{E}_2(R^+)$ enthaltenen Ringen befreundeter Doppelhomothetismen sprechen. Nach Rédei [3] liegt jede Menge befreundeter Doppelhomothetismen (insbesondere also jeder Doppelhomothetismus) von R in einem maximalen Ring $\mathfrak{D}$ dieser Art. Die zugehörigen faktorenfreien Everettschen Erweiterungen $\mathfrak{D} \dotplus R$ sind die Holomorphe von R, und die Einzigkeit des Holomorphs von R läuft auf die Existenz nur eines maximalen Ringes befreundeter Doppelhomothetismen hinaus.

Wir stellen nun fest, daß die Bedingung (2_1) unter allen Endomorphismen von R^+ diejenigen auswählt, die überhaupt als erste Komponente eines Doppelhomothetismus von R in Frage kommen. Wie man leicht nachrechnet, bilden diese Endomorphismen $a_1, b_1, \ldots$ einen Unterring $\mathfrak{H}_1$ von $\mathscr{E}(R^+)$. Entsprechend bilden diejenigen Endomorphismen $a_2, b_2, \ldots$, die (2_2) erfüllen, einen solchen Unterring $\mathfrak{H}_2$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ enthält jedenfalls den Nullendomorphismus $o = o^*$, den identischen Automorphismus $e = e^*$ sowie alle die Endomorphismen, die von einem Zentrumselement ϱ von R gemäß

$$\alpha \to \varrho\alpha = \alpha\varrho$$

induziert werden. Ist allgemein a^* ein Element von $\mathfrak{H}^*$, so ist $a = (a^*, a^*)$ wegen

$$(a^*\alpha)\beta = a^*(\alpha\beta) = \alpha(a^*\beta)$$

und

$$a^*a^*\alpha = a^*a^*\alpha$$

ein Doppelhomothetismus von R. Da zwei solche Doppelhomothetismen $a = (a^*, a^*)$, $b = (b^*, b^*)$ genau dann befreundet sind, wenn

$$a^*b^*\alpha = b^*a^*\alpha$$

gilt, erhalten wir

Satz 1. *Für die Einzigkeit des Holomorphs von R ist notwendig, daß der Ring* $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathscr{E}(R^+)$ *kommutativ ist.*

Weiterhin betrachten wir die Menge $\mathfrak{H}_1'$ derjenigen Endomorphismen $a_1 \in \mathfrak{H}_1$, die tatsächlich als erste Komponente in wenigstens einem Doppelhomothetismus von R auftreten, zu denen es also ein $a_2 \in \mathfrak{H}_2$ gibt, so daß für a_1 und a_2 die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind. Entsprechend definieren wir die Menge $\mathfrak{H}_2'$. Aus obigem geht hervor, daß dann sogar

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_1' \cap \mathfrak{H}_2'$$

gilt, jedoch sind $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ im allgemeinen keine Unterringe von $\mathscr{E}(R^+)$. Da zwei Doppelhomothetismen $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ genau dann befreundet sind, wenn gemäß (5) stets

$$b_2a_1\alpha = a_1b_2\alpha \quad \text{und} \quad a_2b_1\alpha = b_1a_2\alpha$$

gilt, kommen wir zu folgendem Kriterium:

Satz 2. *Für die Einzigkeit des Holomorphs von R ist notwendig und hinreichend, daß jeder Endomorphismus aus* $\mathfrak{H}_1'$ *mit jedem Endomorphismus aus* $\mathfrak{H}_2'$ *vertauschbar ist, d. h., daß alle Kommutatoren*

$$[a_1, b_2] = a_1b_2 - b_2a_1 \quad \textit{mit} \quad a_1 \in \mathfrak{H}_1', b_2 \in \mathfrak{H}_2'$$

gleich dem Nullendomorphismus sind.

Insbesondere sind dann auch $\mathfrak{H}_1'$ *und* $\mathfrak{H}_2'$ *Unterringe von* $\mathscr{E}(R^+)$.

Zusatz. *Allgemein sind diese Kommutatoren $[a_1, b_2]$ Elemente von $\mathfrak{H}^*$, die R in den Annullator $\mathfrak{n}$ von R und R^2 auf das Nullelement von R abbilden.*

Es bleibt die Ringeigenschaft von $\mathfrak{H}_1'$ bzw. $\mathfrak{H}_2'$ und der Zusatz zu beweisen; wir begnügen uns mit letzterem. Zunächst gilt $([a_1, b_2]\alpha)\beta = 0$ wegen

$$((a_1 b_2)\alpha)\beta = (a_1(b_2\alpha))\beta = a_1((b_2\alpha)\beta) = a_1(\alpha(b_1\beta)) = (a_1\alpha)(b_1\beta)$$

und
$$((b_2 a_1)\alpha)\beta = (b_2(a_1\alpha))\beta = (a_1\alpha)(b_1\beta)$$

(wobei wir von (2_1) und (3) mit einem zu b_2 korrespondierenden b_1 Gebrauch gemacht haben) und entsprechend $\beta([a_1, b_2]\alpha) = 0$ für alle β aus R, so daß stets $[a_1, b_2]\alpha \in \mathfrak{n}$ erfüllt ist. Analog folgt

$$[a_1, b_2](\alpha\beta) = (a_1 b_2)(\alpha\beta) - (b_2 a_1)(\alpha\beta) = (a_1\alpha)(b_2\beta) - (a_1\alpha)(b_2\beta) = 0,$$

woraus man nun auch die übrigen Behauptungen des Zusatzes erhält.

Wie man sieht, ergibt sich aus Satz 2 und dem Zusatz sofort, daß die Bedingungen II, IV und V für die Einzigkeit des Holomorphs von R hinreichend sind, wobei die II und IV betreffenden Aussagen im wesentlichen auch bereits den Zusatz ergeben.[4]) Weiterhin gilt bei kommutativer Multiplikation von R bereits $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^*$, und wir erhalten in Ergänzung zu unseren Sätzen das

Korollar. *Für die Einzigkeit des Holomorphs eines kommutativen Ringes R ist die Kommutativität des Ringes $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^* \subseteqq \mathscr{E}(R^+)$ notwendig und hinreichend.*

Wir kommen nun zu dem angekündigten Beispiel eines Ringes R mit nur einem Holomorph, der jedoch alle in § 1 angegebenen hinreichenden Bedingungen verletzt. Es sei $R = R_1 \oplus R_2$ die direkte Summe eines Körpers $R_1 = \langle 0, \varepsilon \rangle$ der Ordnung 2 und eines Zeroringes $R_2 = \langle 0, \nu \rangle$ der Ordnung 2. Dann hat R diesen Zeroring als Annullator, es gilt $R^2 = R_1 \subset R$ und der Endomorphismenring $\mathscr{E}(R^+)$ enthält die zur vollen Permutationsgruppe von drei Elementen isomorphe Automorphismengruppe von R^+, ist also nichtkommutativ. Trotzdem hat R auf Grund des Korollars nur ein Holomorph, denn $\mathfrak{H}_1$ besteht aus folgenden Endomorphismen, deren Kommutativität man leicht nachrechnet:

Bild von	bei s_0	bei s_1	bei s_2	bei s_3
0	0	0	0	0
ε	0	ε	ε	0
ν	0	ν	0	ν
$\varepsilon + \nu = a$	0	a	ε	ν

Wie wir nur bemerken wollen, besteht der maximale Ring $\mathfrak{D}$ der Doppelhomothe-

[4]) Selbstverständlich lassen sich diese Aussagen auch ohne explizite Verwendung der Komponenten der Doppelhomothetismen ableiten, so etwa IV gemäß:

$$(a(ab))\beta = a((ab)\beta) = a(a(b\beta)) = (aa)(b\beta) = ((aa)b)\beta,$$

also $(a(ab) - (aa)b)\beta = 0$ und entsprechend $\beta(a(ab) - (aa)b) = 0$, so daß aus $\mathfrak{n} = (0)$ die Einzigkeit des Holomorphs von R folgt.

tismen aus folgenden Elementen:

$$(s_0, s_0)\ (s_1, s_1)\ (s_2, s_2)\ (s_3, s_3)$$
$$(s_0, s_3)\ (s_3, s_0)\ (s_1, s_2)\ (s_2, s_1).$$

Mit $\mathfrak{H}^*$ ist natürlich auch $\mathfrak{D}$, nicht aber das Holomorph $\mathfrak{D} \mathbin{+\!\!\!\!\cdot} R$ kommutativ, wie aus dem weiter unten zitierten Kriterium von LEEUWEN hervorgeht (vgl. § 3).

Anderseits gibt es aber tatsächlich auch Ringe, die keine Zeroringe sind und trotzdem mehrere Holomorphe besitzen. Ist etwa $R = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ die direkte Summe des Ringes $R_1 = \Gamma$ der ganzen Zahlen und zweier Zeroringe R_2 und R_3 mit Γ^+ als Modul, so hat R als Endomorphismenring den vollen Matrizenring $\mathfrak{M}_3(\Gamma)$. Wie man leicht nachrechnet, besteht $\mathfrak{H}_1$ gerade aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

so daß R nach dem Korollar (oder auch schon nach Satz 1) mehrere Holomorphe besitzt.

Schließlich können wir diese und ähnliche Beispiele folgenden allgemeinen Aussagen unterordnen:

Satz 3. *Es sei $R = R_1 \oplus R_2$ ein Ring, in dem ein Zeroring R_2 (der damit Unterring des Annullators $\mathfrak{n}$ von R ist) als direkter Summand auftritt. Dann hat R mehrere Holomorphe, wenn dies für R_2 zutrifft, wenn also der Endomorphismenring $\mathscr{E}(R_2^+)$ von R_2^+ nichtkommutativ ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Endomorphismen s_1 und s_2 von R_2^+ und ein Element $\varrho_2 \in R_2^+$ mit

$$(s_1 s_2 - s_2 s_1)\,\varrho_2 \neq 0.$$

Gemäß $s_i(\alpha_1 + \alpha_2) = s_i\alpha_2$ mit $\alpha_1 \in R_1$, $\alpha_2 \in R_2$ läßt sich jeder dieser Endomorphismen von R_2^+ zu einem Endomorphismus von R^+ fortsetzen. Wegen

$$s_i((\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)) = s_i(\alpha_1\beta_1 + 0) = 0$$
$$(s_i(\alpha_1 + \alpha_2))(\beta_1 + \beta_2) = (s_i\alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)(s_i(\beta_1 + \beta_2)) = (\alpha_1 + \alpha_2)(s_i\beta_2) = 0$$

liegen diese fortgesetzten Endomorphismen s_1 und s_2 in $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^* \subseteqq \mathscr{E}(R^+)$, so daß $\mathfrak{H}^*$ nichtkommutativ ist und damit R nach Satz 1 mehrere Holomorphe besitzt.

Leider können wir dieses Kriterium nur mit einer Verschärfung der Voraussetzung über R auch als notwendig nachweisen. Immerhin enthält der nachfolgende Satz rein formal alle in § 1 angegebenen hinreichenden Kriterien.

Satz 4. *Es sei $R = R^2 \oplus \mathfrak{n}$ die direkte Summe des Ideals R^2 und seines Annullators $\mathfrak{n}$. Dann ist für die Einzigkeit des Holomorphs von R notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{n}$ nur ein Holomorph besitzt, also der Endomorphismenring $\mathscr{E}(\mathfrak{n}^+)$ kommutativ ist.*

Beweis. Nach dem voranstehenden Satz ist nur zu zeigen, daß R unter den angegebenen Bedingungen nur ein Holomorph besitzt. Anderenfalls gäbe es Endomorphismen $a_1 \in \mathfrak{H}_1'$ und $b_2 \in \mathfrak{H}_2'$ und ein Element $\alpha_1 + \alpha_2 \in R$ mit

$$(a_1 b_2 - b_2 a_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0.$$

Wegen $\alpha_1 \in R^2, \alpha_2 \in \mathfrak{n}$ folgt aus dem Zusatz zu Satz 2, daß dabei

$$(a_1 b_2 - b_2 a_1)(\alpha_1 + \alpha_2) = (a_1 b_2 - b_2 a_1)\alpha_2 = \nu$$

mit $\nu \neq 0$ aus $\mathfrak{n}$ gilt. Andererseits bildet ganz allgemein ein Endomorphismus $a_1 \in \mathfrak{H}_1'$ jedes Element $\alpha_2 \in \mathfrak{n}$ wieder auf ein Element aus $\mathfrak{n}$ ab, wie sich aus (2_1) bzw. (3) gemäß

$$a_1(\alpha_2 \beta) = a_1(0) = 0 = (a_1 \alpha_2)\beta$$
$$(a_2 \beta)\alpha_2 = 0 = \beta(a_1 \alpha_2)$$

mit beliebigen $\beta \in R$ ergibt; das gleiche gilt für jeden Endomorphismus b_2 aus $\mathfrak{H}_2'$. Damit induzieren die Endomorphismen von R^+ aus $\mathfrak{H}_1' \cup \mathfrak{H}_2'$ Endomorphismen von $\mathfrak{n}^+$, wobei also insbesondere die oben angegebenen Endomorphismen a_1 und b_2 nichtkommutative Endomorphismen von $\mathfrak{n}^+$ liefern.

§ 3

Leeuwen hat in [1] gezeigt, daß alle Holomorphe eines Ringes R genau dann kommutativ sind, wenn für jeden Doppelhomothetismus a stets $a\alpha = \alpha a$ gilt, also jeder Doppelhomothetismus die Form $a = (a^*, a^*)$ mit $a^* \in \mathfrak{H}^*$ hat. Insbesondere ist dann der Ring R selbst kommutativ. Daraus folgt (vgl. [1]), daß das eindeutig bestimmte Holomorph eines nullteilerfreien Ringes R bzw. eines Ringes R mit $R^2 = R$ genau dann kommutativ ist, wenn dies für R zutrifft. Die erste dieser Aussagen läßt sich verallgemeinern:

Satz 5. *Ist R ein Ring mit dem Annullator $\mathfrak{n} = (0)$, so ist das eindeutig bestimmte Holomorph von R dann und nur dann kommutativ, wenn R kommutativ ist.*

Es gilt dann nämlich wegen

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta) = (a\beta)\alpha = a(\beta\alpha) = a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$$

auch schon $(\alpha a - a\alpha)\beta = 0$ für alle β, also stets $\alpha a = a\alpha$.

Jedoch ist es nicht allgemein richtig, daß sich für Ringe mit eindeutig bestimmtem Holomorph die Kommutativität von R auf das Holomorph überträgt. Ein entsprechendes Gegenbeispiel war bereits in § 2 im Anschluß an das Korollar aufgetreten.

Literaturverzeichnis

[1] L. van Leeuwen, On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, ser. A, **61** (1958), 162—169.

[2] L. Rédei, Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 169—195.

[3] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

[4] T. Szele—J. Szendrei, On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 309—323.

[5] J. Szendrei, Zur Holomorphentheorie der Ringe, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1955—56), 450—454.

(Eingegangen am 16. April 1962)